

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

კომპაქტური ვეივლეტ ფუნქციების აგების ახალი მეთოდი.

ბექა ერგემლიძე

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

ხელმძღვანელი : ასოცირებული პროფესორი ლაშა ეფრემიძე

თბილისი

2013

სარჩევი

ანოტაცია		3
შესავალი		4
ძირითადი აღნიშვნები		5
თეორემა1 ვეივლეტ ფუნქციის		
არსებობის და ერთადერთობის შესახებ		6
თეორემა2 ვეივლეტ ფუნქციისკენ		
იტერაციული კრებადობის შესახებ		6
ვეივლეტ მატრიცის მიხედვით ვეივლეტ		
ფუნქციის აგების ალგორითმი		15
მიღებული ვეივლეტ ფუნქციების		
გრაფიკები		17
პროგრამის კოდი C++ –ში.		19

ანოტაცია

საბაკალავრო ნაშრომში შესწავლილია კავშირი ვეივლეტ მატრიცებსა და ვეივლეტ ფუნქციებს შორის. ძირითადი თეორემა, რომ ყოველ ვეივლეტ მატრიცას ცალსახად შეესაბამება ვეივლეტ ფუნქციების სისტემა, არ მოიპოვებოდა დაწვრილებით, ნახტომებისა და დაუმტკიცებელი ადგილების გარეშე დაწერილი. ნაშრომში მოყვანილია ამ თეორემის დეტალური, სრულყოფილი დამტკიცება. დამტკიცებისას აგებულია იტერაციული პროცესი რომელიც სუსტად კრებადია საძიებელი ფუნქციისკენ კვადრატული ნორმით.

ნაშრომის მეორე ნაწილში მოყვანილია ალგორითმი, რომლითაც შესაძლებელია ვეივლეტ მატრიცის მიხედვით ცხადი სახით ვეივლეტ ფუნქციების აგება. C++-ში დაიწერა შესაბამისი პროგრამა და თვალსაჩინოებისთვის მოყვანილია ამ პროგრამით გამოყვანილი დობეშის ვეივლეტ ფუნქციის და რამოდენიმე მაღალგანზომილებიანი ვეივლეტ მატრიცით მიღებული ახალი ვეივლეტ ფუნქციების გრაფიკები.

Annotation

In the thesis was examined relationship between Wavelet matrices and Wavelet functions. The proof of the main theorem, that there exists exactly one system of wavelet functions for every wavelet matrix, could not be found in a complete form, without missing parts and unproven details. In the thesis it is given completely detailed proof. During proof it is constructed iterating process which is weakly convergent to a scaling function with square norm.

In the second part of the thesis it is given algorithm which helps to construct Wavelet function according to Wavelet matrix. In programming language C++ was written the program and using it, there are given plots of Daubechies and several high-dimension wavelets.

შესავალი

ვეივლეტ გარდაქმნა ფართოდ გამოიყენება სიგნალების დამუშავებაში, კერძოდ, ხშირად იყენებენ სურათების ზომის დაკვეცისთვის ან ფოტოდან ხმაურის მოსაშორებლად. ვეივლეტ თეორიის დისკრეტულ ნაწილი ეხება ვეივლეტ მატრიცებს, რომელიც ადრე ფილტრთა ბანკების სახით იყო ცნობილი [3]. ფილტრთა ბანკები შედგებოდა დაბალი გამტარობის ფილტრისგან (ვეივლეტ-მატრიცის პირველი სტრიქონი) და რამოდენიმე მაღალი გამტარობის ფილტრისგან (მატრიცის დანარჩენი სტრიქონები). მათი საშუალებით ახდენდნენ სიგნალიდან გამოეყოთ დაბალი და მაღალი სიხშირის ნაწილები ერთმანეთისაგან და დაემუშავებინათ ისინი ცალ-ცალკე.

ვეივლეტ გარდაქმნის უწყვეტი ნაწილი წარმოადგენს ფურიეს ჰარმონიული ანალიზის ბუნებრივ გაგრძელებას. $\psi \in L^2$ ვეივლეტ ფუნქციის კუმშვითა და ძვრით მიიღება ბაზისი, რომელიც შედგება შემდეგი ფუნქციებისგან:

$$\psi_{i,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \cdot \psi(2^j t - K)$$

$\psi \in L^2$ ისეთი ფუნქციაა რომ სრულდება:

$$\langle \psi_{i,k}(t), \psi_{j,m}(t) \rangle = \delta_{ij} \delta_{km}$$

აღსანიშნავია ის ფაქტი, რომ ფუნქციის ამ ბაზისში გაშლა განსხვავებით ფურიეს გარდაქმნისა, საშუალებას გვაძლევს ერთდორულად დავაკვირდეთ ფუნქციას როგორც დროში ასევე სიხშირულად. სხვა სიტყვებით, მოცემული $f(t)$ ფუნქციისთვის $b_{j,k} = \int f(t) \psi_{j,k}(t) dt$ კოეფიციენტი განსაზღვრავს რა სიდიდით მონაწილეობს f -ის გაშლაში j სიხშირის ვეივლეტი k დროში.

ზემოთ ნახსენები ეს ორი თეორია არსებობდა ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად, ხოლო შემდეგ დადგინდა პირდაპირი კავშირი მათ შორის და აღმოჩნდა, რომ ფაქტობრივად ეს ორი გარდაქმნა ერთიდაიგივეა. სწორედ ამ კავშირს შეეხება თემის შემდეგი ნაწილი.

ძირითადი აღნიშვნები

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$S(R)$ სწრაფად ქრობადი ფუნქციების კლასი ანუ

$$S(R) = \{f \in C^\infty(R) : \forall p, m \quad f^m p(x) \in c_0(R)\}$$

სადაც p სასრული ხარისხის პოლინომია ხოლო $c_0(R)$ უსასრულოებაში ქრობადი ფუნქციები.

რადგან $\forall p$ -სთვის $|f^m p(x) * x^2| \rightarrow 0 \quad x \rightarrow \infty$ შეგვიძლია მივჩნიოთ $|f^m p(x)| < \frac{1}{x^2}$ როცა $x > R$

ხოლო $\frac{1}{x^2} \quad x > R$ სიმრავლეზე ინტეგრებადია ანუ ყოველი $f \in S(R)$ -სთვის და $\forall p$ -სთვის fp არის ინტეგრებადი ფუნქცია. (რადგანაც $x < R$ ზეც ცხადია fp ინტეგრებადია)

ამ უკანასკნელ თვისებას ქვემოთ ხშირად გამოვიყენებთ.

$s'(R)$ განზოგადებული ფუნქციათა კლასი $S(R)$ -ზე, ანუ ყოველი $\eta \in S(R)$ ისთვის

$\langle \varphi, \eta \rangle = \int_R \varphi(x) \eta(x) dx$ განზოგადებული ფუნქცია ეკუთვნის $s'(R)$ -ს.

$A = (a_k^s)$ ვეივლეტ მატრიცაა თუ სრულდება:

- 1) $\sum_{k=0}^{mg-1} a_k^i = m \delta_{i,0}$ წრფივი პირობა.
- 2) $\sum_{k=0}^{m(g-n)-1} a_k^s a_{k+nm}^{s'} = m \delta_{n,0} \delta_{s,s'}$ კვადრატული პირობა.

განტოლებას

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{mg-1} a_k^0 \varphi(mx - k)$$

ვეივლეტ მატრიცის შესაბამისი მასშტაბის განტოლება ეწოდება, ხოლო მის ამონახსნს- მასშტაბის ფუნქცია.

ასევე განვსაზღვროთ თითოეული სტრიქონის შესაბამისი ფურიეს მწკრივი:

$$F_s(\xi) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{mg-1} a_k^s e^{ik\xi}$$

ხშირად F_0 -ის მაგივრად გამოვიყენებთ ჩანაწერს F .

ვაჩვენოთ რომ ვეივლეტ მატრიცის კვადრატული პირობა ექვივალენტურია შემდეგი პირობის:

$$\sum_{k=0}^{m-1} F_s \left(\omega + \frac{2\pi k}{m} \right) \overline{F_{s'} \left(\omega + \frac{2\pi k}{m} \right)} = \delta_{s,s'}$$

$$F_s(0) = \delta_{s,0}$$

ჯერ ვაჩვენოთ რომ $\sum_{k=0}^{m-1} e^{in(\omega + \frac{2\pi k}{m})} = me^{in\omega}$ თუ $m|n$ და არის 0 სხვა შემთხვევაში.

პირველი ნაწილი ტრივიალურია, რადგანაც $e^{in(\omega + \frac{2\pi k}{m})} = e^{in\omega} * e^{i\frac{2\pi kn}{m}}$ თუ $m|n$ ე.ი. $\frac{kn}{m}$ მთელი რიცხვია ყოველი k -სთვის. ე.ი. $e^{i\frac{2\pi kn}{m}} = e^0 = 1$. ე.ი. $\sum_{k=0}^{mg-1} e^{in(\omega + \frac{2\pi k}{m})} = me^{in\omega}$.

ხოლო თუ n არ არის m -ის ჯერადი მაშინ $e^{-2\pi i \frac{n}{m}} \neq 1$ ე.ი. გვექნება:

$$\sum_{k=0}^{mg-1} e^{in(\omega + \frac{2\pi k}{m})} = \sum_{k=1}^{mg} e^{in(\omega + \frac{2\pi(k-1)}{m})} = \sum_{k=1}^{mg} e^{in(\omega + \frac{2\pi k}{m})} * e^{-2\pi i \frac{n}{m}} = e^{-2\pi i \frac{n}{m}} * \sum_{k=0}^{mg-1} e^{in(\omega + \frac{2\pi k}{m})}$$

ბოლო ტოლობაში გამოვიყენეთ ის ფაქტი რომ $e^{in(\omega + \frac{2\pi k}{m})}$ $k=mg$ და $k=0$ შემთხვევაში

ერთიდაიგივეა (კერძოდ $e^{in\omega}$). ე.ი. მივიღეთ რომ $\sum_{k=0}^{mg-1} e^{in(\omega + \frac{2\pi k}{m})}$ ტოლია თავისი თავი

გამრავლებული არაერთეულოვან რიცხვზე ე.ი. $\sum_{k=0}^{mg-1} e^{in(\omega + \frac{2\pi k}{m})} = 0$.

$$\sum_{s=0}^{m-1} F_{s'} \left(\omega + \frac{2\pi k}{m} \right) \overline{F_s \left(\omega + \frac{2\pi k}{m} \right)} = \sum_{s=0}^{m-1} \frac{1}{m^2} \sum_{k,l} a_k^{s'} \bar{a}_l^s e^{i(k-l)(\omega + \frac{2\pi k}{m})} =$$

$$= \sum_{k,l} \frac{1}{m^2} \sum_{s=0}^{m-1} a_k^{s'} \bar{a}_l^s e^{i(k-l)(\omega + \frac{2\pi k}{m})} =$$

$$= \sum_n \frac{1}{m^2} \sum_{k,l:k-l=mn} a_k^{s'} \bar{a}_l^s m e^{in\omega}$$

ხოლო თუ გამოვიყენებთ ვეივლეტ მატრიცის კვადრატულ პირობას თითოეული n -სთვის

$$\sum_{k,l:k-l=mn} a_k^{s'} \bar{a}_l^s = \sum_{k,k+mn} a_k^{s'} \bar{a}_{k+mn}^s = 0$$

როცა $n \neq 0$

ხოლო როცა $n = 0$ $\sum_{k,l:k-l=mn} a_k^{s'} \bar{a}_l^s = m\delta_{s,s'}$ ე.ი. გვექნება:

$$\sum_{s=0}^{m-1} F_{s'} \left(\omega + \frac{2\pi k}{m} \right) \overline{F_s \left(\omega + \frac{2\pi k}{m} \right)} = \sum_{n=0} \frac{1}{m^2} \delta_{s,s'} m e^{in\omega} = \frac{1}{m^2} m \delta_{s,s'} m e^0 = \delta_{s,s'}$$

ნებისმიერი მოცემული A ვეივლეტ მატრიცისთვის რეკურსიულად განვსაზღვროთ შემდეგი ფუნქციათა მიმდევრობა:

$$\varphi^0(x) = \chi_{[0,1)}$$

$$\varphi^v(x) = \sum_{k=0}^m a_k^0 \varphi^{v-1}(mx - k)$$

ქვემოთ ვაჩვენებთ φ^v ფუნქციების კრებადობას განზოგადებულ ფუნქციათა $s'(R)$ სივრცეში φ ფუნქციისაკენ და ვაჩვენებთ რომ $\varphi \in L^2$ არის მასშტაბის განტოლების ამონახსნი.

თეორემები და მათი დამკიცებები

თეორემა1:[1] თუ გვაქვს $A = (a_k^s)$ ვეივლეტ მატრიცა, მაშინ არსებობს ერთადერთი

$\varphi \in L^2(R)$ ფუნქცია და სრულდება შემდეგი პირობები:

ა) $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{mg-1} a_k^0 \varphi(mx - k)$ თ.ყ.

ბ) $\text{supp } \varphi \subset [0, (g-1)(\frac{m}{m-1}) + 1]$

გ) $\int \varphi(x) dx = 1$

ამ თეორემის დასამტკიცებლად ჯერ დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა:

თეორემა2:[1] თუ φ^v განსაზღვრულა ზემოთ მოყვანილი წესით, მაშინ φ^v ფუნქციების მიმდევრობა იკრიბება $s'(R)$ კლასში ამავე კლასის φ ფუნქციისკენ.

ყოველი $\varphi^v \in L^2$ კლასის ფუნქციაა, რადგანაც თითოეული φ^v კომპაქტზე განსაზღვრული საფეხურა ფუნქციაა, შესაბამისად ყოველი φ^v განსაზღვრავს $s'(R)$ კლასის განზოგადებულ ფუნქციას

$$\langle \varphi^v, \eta \rangle = \int_R \varphi^v(x) \eta(x) dx$$

სადაც $\eta \in s(R)$. რადგანაც ფურიეს გარდაქმნა L^2 დან აუცილებლად L^2 -ში გადადის ამიტომ φ^v ის ფურიეს გარდაქმნებიც განსაზღვრავენ ანალოგიურ განზოგადებულ ფუნქციებს.

მოვახდინოთ ტოლობაში

$$\varphi^v(x) = \sum_{k=0}^{mg-1} a_k^0 \varphi^{v-1}(mx - k)$$

ორივე მხარის ფურიეს გარდაქმნა:

$$\widehat{\varphi^{v+1}}(\xi) = \sum_{k=0}^{mg-1} a_k^0 \widehat{\varphi^v}(m\xi - k)$$

$$\widehat{\varphi^{v+1}}(\xi) = \sum_{k=0}^{mg-1} a_k^0 e^{i \frac{k}{m} \xi} \widehat{\varphi^v}(m\xi)$$

$$\sum_{k=0}^{mg-1} a_k^0 e^{i \frac{k}{m} \xi} = m \cdot F\left(\frac{\xi}{m}\right)$$

$$\widehat{\varphi^{v+1}}(\xi) = F\left(\frac{\xi}{m}\right) m \widehat{\varphi^v}(m\xi)$$

$$\widehat{\varphi^{v+1}}(\xi) = \widehat{\varphi^v}\left(\frac{\xi}{m}\right) F\left(\frac{\xi}{m}\right)$$

ე.ი.

$$\widehat{\varphi^{v+1}}(\xi) = \widehat{\varphi^0}\left(\frac{\xi}{m}\right) \prod_{l=1}^v F\left(\frac{\xi}{m^l}\right)$$

ლემა1:

ა) მიმდევრობა $\phi_n(\xi) = \prod_{l=1}^n F\left(\frac{\xi}{m^l}\right)$ თანაბრად კრებადია ნებისმიერ კომპაქტზე უწყვეტი ϕ ფუნქციისკენ $\phi(\xi) = \prod_{l=1}^{\infty} F\left(\frac{\xi}{m^l}\right)$.

ბ) ϕ -ს აქვს პოლინომიალური ზრდის რიგი უსასრულოებაში, ანუ არსებობს ისეთი ფიქსირებული K და მთელი M რომ სრულდებოდეს:

$$\phi|\xi| \leq K|\xi|^M \quad \text{როცა } |\xi| > 1$$

გ) უწყვეტი ϕ განსაზღვრავს გაზოგადებულ ფუნქციას $\phi \in S'(R)$.

დ) მიმდევრობა $\hat{\varphi}^v$ თანაბრად კრებადია Φ ფუნქციისკენ და $\hat{\varphi}^v$ კრებადია Φ -სკენ განზოგადებულ ფუნქციათა სივრცეში.

დამტკიცება:

$$F_0(\xi) - 1 = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{mg-1} a_k^0 (e^{2\pi i k \xi} - 1)$$

გეომეტრიულად ადვილი დასანახია რომ $|e^{ix} - 1| \leq |x|$, რადგანაც $|e^{ix} - 1|$ არის მონაკვეთის სიგრძე 1 დან e^{ix} -მდე ხოლო $|x|$ შესაბამისი რკალის სიგრძე. ე.ი. გვექნება

$$|e^{2\pi i k \xi} - 1| \leq 2\pi k |\xi|$$

$$B \equiv \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{mg-1} |a_k^0| 2\pi k$$

$$|F_0(\xi) - 1| \leq B * |\xi|$$

$$|F_0\left(\frac{\xi}{m^l}\right) - 1| \leq B * \left|\frac{\xi}{m^l}\right| \quad (1)$$

რადგან კრებადობას ვამტკიცებთ კომპაქტზე შეგვიძლია მივიჩნიოთ $|\xi| < R$ ე.ი. გვექნება:

$$|F_0\left(\frac{\xi}{m^l}\right) - 1| \leq B R m^{-l} \quad (2)$$

ახლა ვაჩვენოთ შემდეგი ლემა.

ლემა 2: უსასრულო $\prod_{k=0}^{\infty} (a_k + 1)$ ნამრავლი კრებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუ $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ კრებადია.

დამტკიცება: შევნიშნოთ რომ თუ რომელიმე კრებადია მაშინ აუცილებლად $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$. (*)

$\prod_{k=0}^{\infty} (a_k + 1)$ ის კრებადობა ექვივალენტურია $\sum_{k=0}^{\infty} \ln(a_k + 1)$ ის კრებადობის. (**).

რადგან $a_k \rightarrow 0$ $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(a_k + 1)}{a_k} = 1$ ხოლო თუ ორი $\frac{a_k}{b_k} \rightarrow 0$ მაშინ $\sum a_k$ და $\sum b_k$ ორივე კრებადია ან ორივე განშლადი. შესაბამისად (**) ის კრებადობა ექვივალენტურია $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ -ს კრებადობის.

შევნიშნოთ რომ თუ a_k -ს მაგივრად გვექნება ფუნქციების მიმდევრობა მაშინ ერთის თანაბრად კრებადობა ექვივალენტური იქნება მეორეს თანაბრად კრებადობის. Δ

ცხადია $\sum_{l=1}^{\infty} BRm^{-l}$ კრებადია შესაბამისად (2) ის ძალით $\sum_{l=1}^{\infty} |F_0\left(\frac{\xi}{m^l}\right) - 1|$ თანაბრად კრებადია და ლემა 2-ის ძალით უსასრულო ნამრავლიც თანაბრად კრებადია (ფიქსირებულ კომპაქტზე) და რადგან თითოეული ფუნქცია უწყვეტია ესეიგი ზღვართი ϕ ფუნქციაც უწყვეტი იქნება. ე.ი. ა) ნაწილი დამტკიცებულია.

ვთქვათ $|\xi| > 1$ მაშინ შევარჩიოთ ისეთი P რომ შესრულდეს

$$\frac{|\xi|}{m^p} \leq 1 \leq \frac{|\xi|}{m^{p-1}} \quad (3)$$

$$\phi(\xi) = \prod_{l=1}^p F\left(\frac{\xi}{m^l}\right) \prod_{l=1}^{\infty} F\left(\frac{\xi}{m^{l+p}}\right)$$

$$|F(\xi)| = \frac{1}{m} \left| \sum_{k=0}^{mg-1} a_k^0 e^{2\pi i k \xi} \right| \leq \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{mg-1} |a_k^0| \leq B$$

$$\phi_n(\xi) = B^p \prod_{l=1}^{\infty} F\left(\frac{\xi}{m^{l+p}}\right) \quad (4)$$

$$(1) \text{დან გამომდინარეობს} \quad \left| F\left(\frac{\xi}{m^{l+p}}\right) - 1 \right| \leq B |\xi| m^{-(l+p)}$$

$$(3) \text{ ის თანახმად } |\xi| m^{-p} \leq 1$$

$$\left| F\left(\frac{\xi}{m^{l+p}}\right) - 1 \right| \leq B m^{-l}$$

Bm^{-l} დამოუკიდებელია ξ -სგან ე.ი. მარცხენა მხარის შესაბამისი მწკრივი თანაბრად კრებადია და ლემა 2-ის ანალოგიური გამოყენებით ცხადია არსებობს K რომლისთვისაც შესრულდება:

$$\prod_{l=1}^{\infty} F\left(\frac{\xi}{m^{l+p}}\right) < K$$

ამ უკანასკნელიდან და (4) დან გამომდინარეობს

$$|\phi(\xi)| < KB^p$$

ახლა დავადგინოთ p -ს ξ -ზე დამოკიდებულება.

$$(3) \text{ -დან } m^{p-1} < |\xi| \quad \text{ე.ი.} \quad (p-1) \log m \leq \log |\xi|$$

$$p \leq 1 + \frac{\log |\xi|}{\log m}$$

$$|\Phi(\xi)| < KB^p \leq KB^{1+\frac{\log |\xi|}{\log m}} = KB * B^{\frac{\log |\xi|}{\log m}}$$

$$|\Phi(\xi)| < KB |\xi|^{\frac{\log B}{\log m}}$$

ე.ი. ბ) ნაწილი დამტკიცებულია ანუ Φ -ს აქვს პოლინომიალური ზრდის რიგი.

გ) ნაწილი პირდაპირ გამომდინარეობს ბ) ნაწილიდან რადგანაც $\eta \in S(R)$ და Φ პოლინომიალური რიგისაა

$$\langle \Phi, \eta \rangle := \int_{\mathbb{R}} \Phi(\xi) \eta(\xi) d\xi$$

განისაზღვრულია.

$$\hat{\varphi}^{v+1}(\xi) = \hat{\varphi}^0\left(\frac{\xi}{m}\right) \prod_{l=1}^v F\left(\frac{\xi}{m^l}\right) \quad (5)$$

$\chi_{[0,1]}$ ის ფურიეს გარდაქმნას აქვს სახე $e^{\pi i \xi} \left(\frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi} \right)$ შესაბამისად გვექნება

$$\widehat{\varphi^0}(\xi) = \left[e^{\pi i \xi} \left(\frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi} \right) \right]$$

და ცხადია რომ $\lim_{n \rightarrow 0} \hat{\varphi}^0(\xi) = 1$

ე.ი. $\hat{\varphi}^0\left(\frac{\xi}{m}\right) \rightarrow 1$. ასევე უკვე ვაჩვენეთ რომ $\prod_{l=1}^v F\left(\frac{\xi}{m^l}\right) \rightarrow \Phi$

ე.ი. (5)-ის გამოყენებით $\hat{\varphi}^v$ თანაზრად კრებადია Φ -სკენ.

ზემოთ ვაჩვენეთ რომ $|\Phi(\xi)| \leq KB |\xi|^{\frac{\log B}{\log m}}$ ზუსტად ანალოგიურად გვექნება

$$|\widehat{\varphi^v}(\xi)| \leq KB |\xi|^{\frac{\log B}{\log m}}$$

ე.ი. ცხადია ყოველი $\eta \in S(R)$ ის $\widehat{\varphi^v}(\xi) \eta(\xi)$ მიმდევრობა დმინირებადია მიმდევრობით

$KB|\xi|^{\frac{\log B}{\log m}} \eta(\xi)$, ეს უკანასკნელი კი ინტეგრებადია შესაბამისად შეგვიძლია გამოვიყენოთ ლებეგის დომინირებადი კრებადობის თეორემა და ინტეგრალ ქვეშ ზღვარზე გადავიდეთ, ანუ გვექნება:

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi^v}(\xi) \eta(\xi) d\xi = \int \lim_{v \rightarrow \infty} \widehat{\varphi^v}(\xi) \eta(\xi) d\xi = \int \Phi(\xi) \eta(\xi) d\xi$$

ე.ი. $\widehat{\varphi^v}(\xi)$ კრებადა Φ -სკენ განზოგადებულ ფუნქციათა სივრცეში. ამით ლემა-2 დამტკიცებულია.

ე.ი. ჩვენ დავამტკიცეთ რომ $\widehat{\varphi^v} \rightarrow \Phi$ $S'(R)$ სივრცეში. განვსაზღვროთ ფურიეს გარდაქმნის შევრუნებული გარდაქმნით φ ფუნქცია. $\varphi = F^{-1}(\Phi)$. რადგან ფურიეს გარდაქმნა $S'(R)$ სივრცეში ტოპოლოგიურად იზომორფულია ამიტომ

$$\varphi^v \rightarrow \varphi \in S'(R)$$

ე.ი. თეორემა2 დამტკიცებულია.

თეორემა3:[1] თუ გვაქვს $\varphi^v(x)$ ფუნქციათა მიმდევრობა, განსაზღვრული შემდეგი წესით

$$\varphi^v(x) = \sum_{k=0}^{mg-1} a_k^0 \varphi^{v-1}(mx - k)$$

მაშინ $\varphi^v(x)$ სუსტად კრებადია $L^2(R)$ ში $\varphi \in L^2(R)$ ფუნქციისკენ და სრულდება შემდეგი პირობები:

ა) $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{mg-1} a_k^0 \varphi(mx - k)$ თ.ყ.

ბ) $\text{supp } \varphi \subset [0, (g-1)(\frac{m}{m-1}) + 1]$

გ) $\widehat{\varphi} \in C^0(R)$ და $\widehat{\varphi}(0) = 1$.

ჯერ ვაჩვენოთ რომ თიროეული $\varphi^v(x) \in L^2(R)$ კლასის ფუნქციაა. ანუ უნდა ვაჩვენოთ რომ არსებობს ინტეგრალი. $\int_{\mathbb{R}} |\varphi^v(x)| dx$

კერძოდ ვაჩვენოთ რომ

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi^v(x) \overline{\varphi^v(x - n)} dx = \delta_{0n} \quad (6)$$

და ამ უკანასკნელიდან კი პირდაპირ გამომდინარეობს რომ $\int_{\mathbb{R}} |\varphi^v(x)| dx = 1$ ანუ $\varphi^v \in L^2(R)$

$v=0$ ისთვის (6) ცხადია სამართლიანია. დავუშვათ v -სთვის სრულდება და დავამტკიცოთ $v+1$ -სთვის:

$$\begin{aligned} \int_R \varphi^{v+1}(x) \overline{\varphi^{v+1}(x-n)} dx &= \\ &= \int_R \sum_{k=0}^{mg-1} a_k^0 \varphi^v(mx-k) \overline{\sum_{l=0}^{mg-1} a_l^0 \varphi^v(mx-mn-l)} dx = \\ &= \sum_{k,l} a_k^0 \overline{a_l^0} \int_R \varphi^v(mx-k) \overline{\varphi^v(mx-mn-l)} dx = \\ &= \frac{1}{m} \sum a_k^0 \overline{a_l^0} \delta_{k,mn+l} = \\ &= \frac{1}{m} \sum a_k^0 \overline{a_{k-mn}^0} = \\ &= \delta_{0,n} \end{aligned}$$

ბოლო გადასვლაში გამოვიყენეთ ფაქტი რომ $A = (a_k^n)$ ვეილეს მატრიცაა. კერძოდ გამოვიყენეთ ვეილეს მატრიცის კვადრატული პირობის თვისება.

ე.ი. ვაჩვენეთ რომ $\int_R |\varphi^v(x)| dx = 1$ ანუ $\|\varphi^v\| = 1$. ე.ი. φ^v ეკუთვნის L^2 სივრცის ერთეულოვან ბირთვს, ვაჩვენოთ რომ ეს ბირთვი არის სუსტად კომპაქტი, ანუ ნებისმიერი უსასრულო მიმდევრობიდან გამოიყოფა სუსტად კრებადი ქვემიმდევრობა. (სუსტად კრებადობას ცხადია ვიხილავთ $S(R)$ კლასის ფუნქციებზე ნამრავლიდან ინტეგრალის მიმართ).

ლემა3: L^2 სივრცის ერთეულოვანი ბირთვი სუსტად კომპაქტურია.

ავიღოთ ნებისმიერი f^n მიმდევრობა L^2 ის ერთეულოვანი ბირთვიდან, ანუ $\|f^n\| \leq 1$. $S(R)$ კლასში გამოვყოთ რაიმე თვლადი ყველგან მკვრივი სიმრავლე $s_1 = \{\eta_i : i \in N\}$. შევნიშნოთ რომ $\int_R |f^n(x) \eta_i(x)| dx \leq \|f^n\| \|\eta_i\| = C(i)$. ე.ი. ყოველი ფიქსირებული η_i -სთვის $|\int_R f^n(x) \eta_i(x) dx|$ შემოსაზღვრულია და ცხადია უსასრულო რაოდენობის რიცხვებს ინტერვალიდან, აქვთ დაგროვების წერტილი t . ე.ი. $\int_R f^n(x) \eta_i(x) dx$ რიცხვების მიმდევრობიდან გამოიყოფა ქვემიმდევრობა $\int_R f^{n_j}(x) \eta_i(x) dx$ რომელთა ზღვარია t .

ახლა განვიხილოთ თავიდან $i=1$ შემთხვევა. მოცემული f^n მიმდევრობიდან გამოვყოთ ზემოთ ნახსენები წესით კრებადი $f^{n_j^1}$ ქვემიმდევრობა (ანუ $\int_R f^{n_j^1}(x) \eta_1(x) dx$ კრებადია).

შემდეგ $i=2$ ისთვის უკვე $f^{n_j^1}$ მიმდევრობიდან გამოვყოთ η_2 -ის მიმართ კრებადი $f^{n_j^2}$ ქვემიმდევრობა, და ა.შ. ცხადია ეს მიმდევრობები ერთმანეთში ჩადგმულია.

ახლა კი განვიხილოთ მიმდევრობა, $g^1 = f^{n_1^1}$, $g^2 = f^{n_2^2}$... სხვა სიტყვებით $g^k = f^{n_k^k}$. ჩვენს მიერ აგებული დიაგონალური g^k მიმდევრობა ცხადია რომ არის თავდაპირველი f^n -ის ქვემიმდევრობა. მეტიც, ყოველი i -სთვის g^k მიმდევრობა არის $f^{n_j^i}$ მიმდევრობის

ქვემიმდევრობაც, დაწყებული $j = i$ დან (პირველ რამოდენიმე წევრს ვუგულებელვყოფთ და პირდაპირ ვიტყვით ხოლმე რომ ქვემიმდევრობაა). შესაბამისად რადგან g^k ზემოთ აღებული ყველა მიმდევრობის ქვემიმდევრობაა და ყოველი $\int_R f^{n_i}(x) \eta_i(x) dx$ კრებადია ე.ი. ყოველი i -სთვის $\int_R g^k(x) \eta_i(x) dx$ კრებადია. მაგრამ რადგან $\eta_i(x)$ ების სიმრავლე ყველგან მკვრივია $S(R)$ -ში ე.ი. ნებისმიერი $\eta \in S(R)$ წარმოდგება η_i -ების ზღვრად და რადგან ყველა $\int_R g^k(x) \eta_i(x) dx$ კრებადია ე.ი. ზღვარზე გადასვლით $\int_R g^k(x) \eta(x) dx$ კრებადია. ე.ი. ჩვენ გამოვყავით ნებისმიერი მიმდევრობიდან ისეთი g^k ქვემიმდევრობა რომელიც სუსტად კრებადია. ე.ი. ერთეულოვანი ბირთვი $L^2(R)$ ში სუსტად კომპაქტია. ამით ლემა 3 დამტკიცებულია.

ე.ი. φ^v მიმდევრობიდან შეგვიძლია ამოვარჩიოთ სუსტად კრებადი φ^{v_i} ქვემიმდევრობა. ვთქვათ φ^{v_i} -ს სუსტი ზღვარია φ_1 , მაშინ $\varphi^{v_i} \rightarrow \varphi_1$ ასევე $s'(R)$ -შიც, მაგრამ ჩვენ ვაჩვენებთ რომ $\varphi^v \rightarrow \varphi$ ამავე კლასში ანუ $\varphi^{v_i} \rightarrow \varphi$ $s'(R)$ -ში. ე.ი. $\varphi = \varphi_1$ რაც იმას ნიშნავს რომ φ^v სუსტად კრებადია

$$\int_R \varphi^V(x) \eta(x) dx = \int_R \sum_k a_k^0 \varphi^{v-1}(mx - k) \eta(x) dx$$

ზღვარზე გადასვლით მივიღებთ

$$\int_R \varphi(x) \eta(x) dx = \int_R \sum_k a_k^0 \varphi(mx - k) \eta(x) dx$$

ე.ი. $\varphi(x)$ არის სუსტი ამონახსნი მასშტაბის განტოლების. ეს ნიშნავს რომ თითქმის ყველა x -სთვის სრულდება:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^m a_k^0 \varphi(mx - k)$$

ამით ა) დამტკიცებულია.

ვთქვათ φ^V -ს supp არის $[0, t_v]$ მაშინ დავთვალოთ $\varphi^v(x) = \sum_{k=0}^{mg-1} a_k^0 \varphi^{v-1}(mx - k)$ -ის სუპორტი. მარცხენა ბოლო ცხადია კვლავ 0-ია, მარჯვენა ბოლო t_{v+1} კი იქნება ყველაზე მარჯვენა ფუნქციის $\varphi^v(mx - (mg - 1))$ ის ყველაზე მარჯვენა არანულოვანი წერტილი. φ^v -სთვის ასეთი წერტილი არის t_v ე.ი. $m t_{v+1} - (mg - 1) = t_v$ ე.ი. $t_{v+1} = \frac{t_v + mg - 1}{m}$. ვთქვათ $\lim_{v \rightarrow \infty} t_v = t$ მაშინ $t = \frac{t + mg - 1}{m}$. ე.ი. $t \left(\frac{m-1}{m} \right) = \frac{mg-1}{m}$ ანუ $t = \frac{mg-1}{m-1} = \frac{mg-m+m-1}{m-1}$

$$\text{ე.ი. } t = (g - 1) \left(\frac{m}{m-1} \right) + 1$$

$$\text{ანუ } \text{supp } \varphi \subset [0, (g - 1) \left(\frac{m}{m-1} \right) + 1].$$

გ) ნაწილი კი უკვე დამტკიცებული გვაქვს ზემოთ რადგანაც $\hat{\phi} = \Phi$ და ჩვენ ვაჩვენებთ რომ Φ უწყვეტი ფუნქციაა, ხოლო ცხადია $\hat{\phi}(0) = 0$ რადგანაც

$$\Phi(0) = \prod_{l=1}^{\infty} F(0) = 1$$

თეორემა 1-ის დამტკიცებისას ვაცვენებთ, რომ რომ $\phi(\xi) = \prod_{l=1}^{\infty} F\left(\frac{\xi}{m^l}\right)$ ფუნქცია ერთადერთია

ხოლო $\hat{\phi}(\xi) = \hat{\phi}(0) \prod_{l=1}^{\infty} F\left(\frac{\xi}{m^l}\right)$. $\hat{\phi}(0)=1$ და შესაბამისად მივიღებთ რომ $\hat{\phi}(\xi)$ ფუნქცია

ერთადერთია, რაც ცალსახად განსაზღვრავს $\phi(\xi)$ ფუნქციის ერთადერთობას.

ამით თეორემა 3 დამტკიცებულია. ხოლო თეორემა 3 მოიცავს თეორემა 1-ს, შესაბამისად თეორემა 1 დამტკიცებულია.

ვეივლეტ მატრიცის მიხედვით ვეივლეტ ფუნქციის აგება

რადგანაც უკვე ვიცით, რომ ყოველი ვეივლეტ მატრიცისთვის არსებობს ვეივლეტ სისტემა მასშტაბის და ვეივლეტ ფუნქციებისა, მათი კომპიუტერულად აგება შესაძლებელია საკმაოდ მარტივი ალგორითმით.

ვიცით რომ $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{mg-1} a_k^0 \varphi(mx - k)$ და $\text{supp } \varphi \subset [0, (g-1)\left(\frac{m}{m-1}\right) + 1]$.

სიმარტივისთვის სუპორის უდიდესი მთელი რიცხვი აღვნიშნოთ N -ით, ანუ

$$N = \left[(g-1)\frac{m}{m-1}\right] + 1$$

პირველ რიგში ვიპოვოთ $\varphi(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობები მთელ წერტილებში.

$$\varphi(0) = a_0^0 \varphi(0)$$

$$\varphi(1) = a_0^0 \varphi(m \cdot 1 - 0) + a_1^0 \varphi(m \cdot 1 - 1) + \dots + a_m^0 \varphi(m \cdot 1 - mg + 1)$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\varphi(N) = a_{mg-1}^0 \varphi(m \cdot N - mg + 1)$$

გვაქვს $N + 1$ განტოლება და $N + 1$ უცნობი ($\varphi(0), \varphi(1) \dots \varphi(N)$).

ე.ი. შეგვიძლია დავწეროთ წრფივ განტოლებათა სისტემა, რომლის ამოხსნით ვიპოვოთ φ ფუნქციის მნიშვნელობებს მთელ წერტილებში.

ე.ი. შეგვიძლია მივიჩნიოთ რომ ცნობილია $\varphi(i) \quad i = 0, 1, \dots, N$.

ვიპოვოთ მნიშვნელობები $\frac{i}{m}$ წერტილებში $i = 0, 1, \dots, mN$ –სთვის.

$$\varphi\left(\frac{i}{m}\right) = \sum_{k=0}^{mg-1} a_k^0 \varphi\left(m\frac{i}{m} - k\right) \text{ ე.ი.}$$

$$\varphi\left(\frac{i}{m}\right) = \sum_{k=0}^{mg-1} a_k^0 \varphi(i - k)$$

განტოლების მარჯვენა მხარეში ყველა წევრი ცნობილია, რადგან მთელ მნიშვნელობებში უკვე დავთვალეთ, ე.ი. ამ ფორმულით ვიპოვოთ მნიშვნელობების $\frac{1}{m}$ ის ჯერად წერტილებში.

$$\varphi\left(\frac{i}{m^2}\right) = \sum_{k=0}^{mg-1} a_k^0 \varphi\left(\frac{i}{m} - k\right)$$

აქ უკვე $\frac{i}{m}$ წერტილებში მნიშვნელობები ცნობილია და შესაბამისად ვიპოვოთ ფუნქციის მნიშვნელობებს $\frac{i}{m^2}$ წერტილებში, და ა.შ.

ამ მეთოდით შევძლებთ ავაგოთ მასშტაბის ფუნქცია დისკრეტულ მნიშვნელობებში.

ცხადია მასშტაბის ფუნქციის საშუალებით ვიპოვოთ შესაბამის ვეივლეტ ფუნქციებსაც

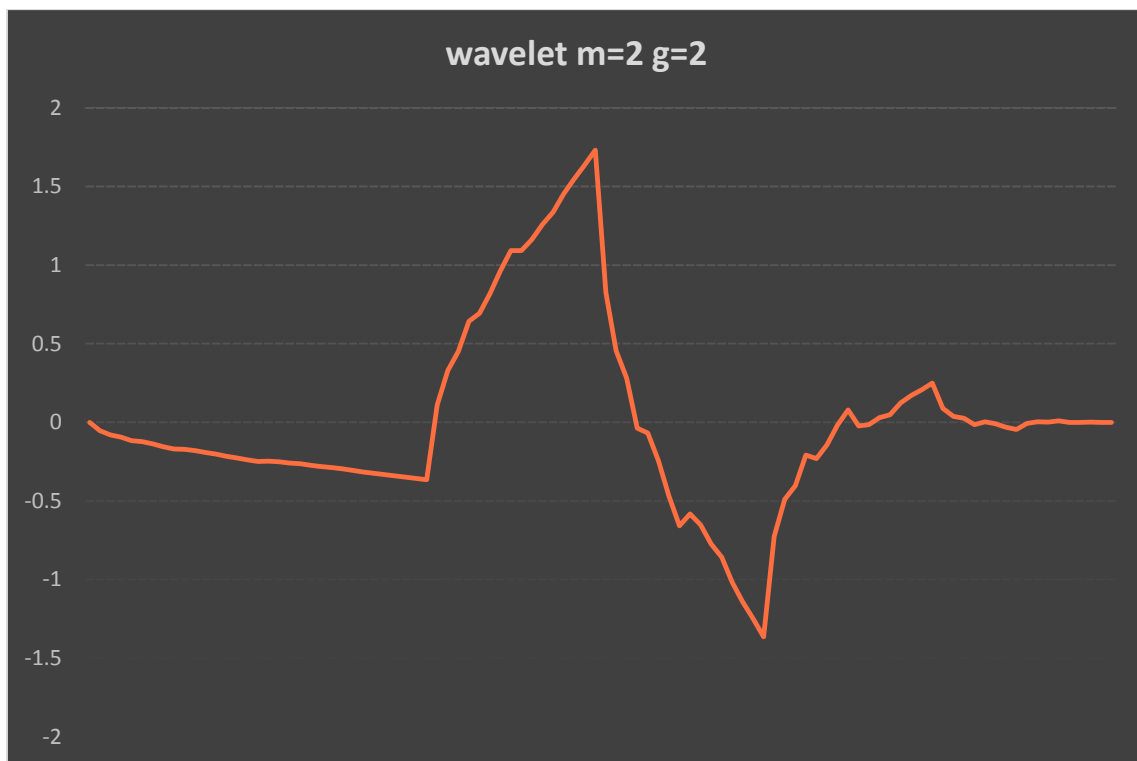
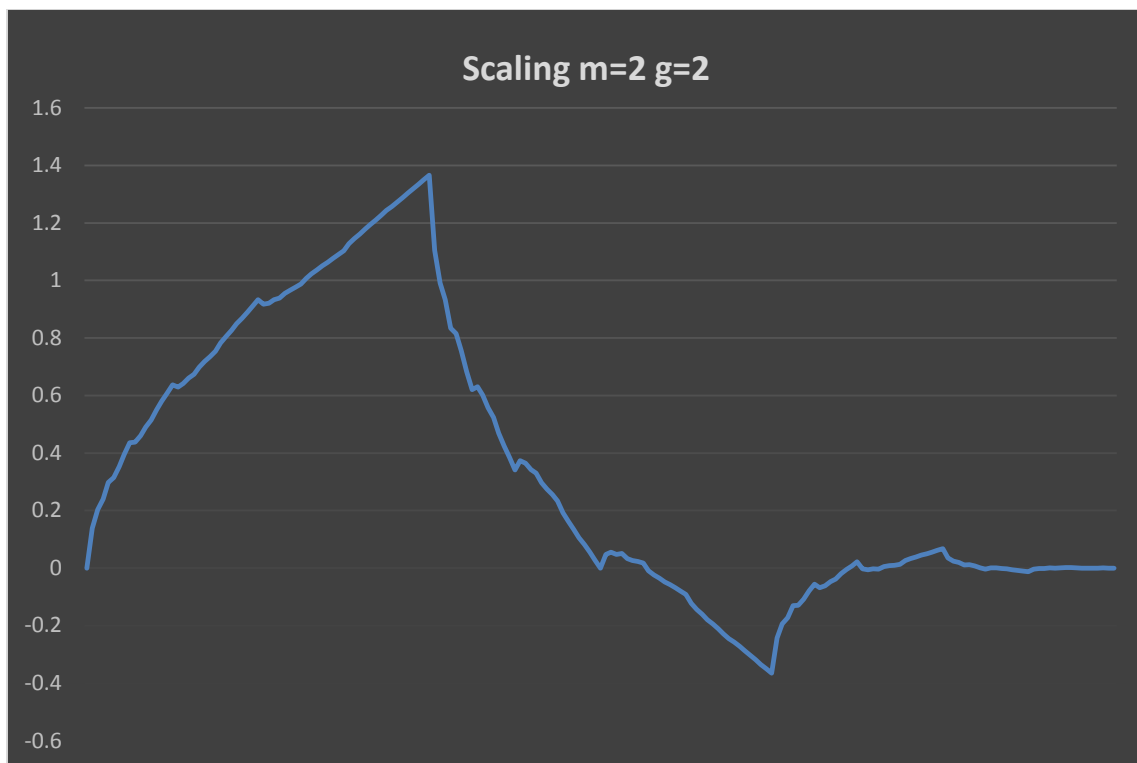
$$\psi^s(x) = \sum_{k=0}^{mg-1} a_k^s \varphi(mx - k)$$

თეზისის ბოლოს მოყვანილია C++ ის კოდი, რომელიც თითოეული ვეივლეტ მატრიცისთვის აბრუნებს შესაბამის ვეივლეტ სისტემის ფუნქციებს

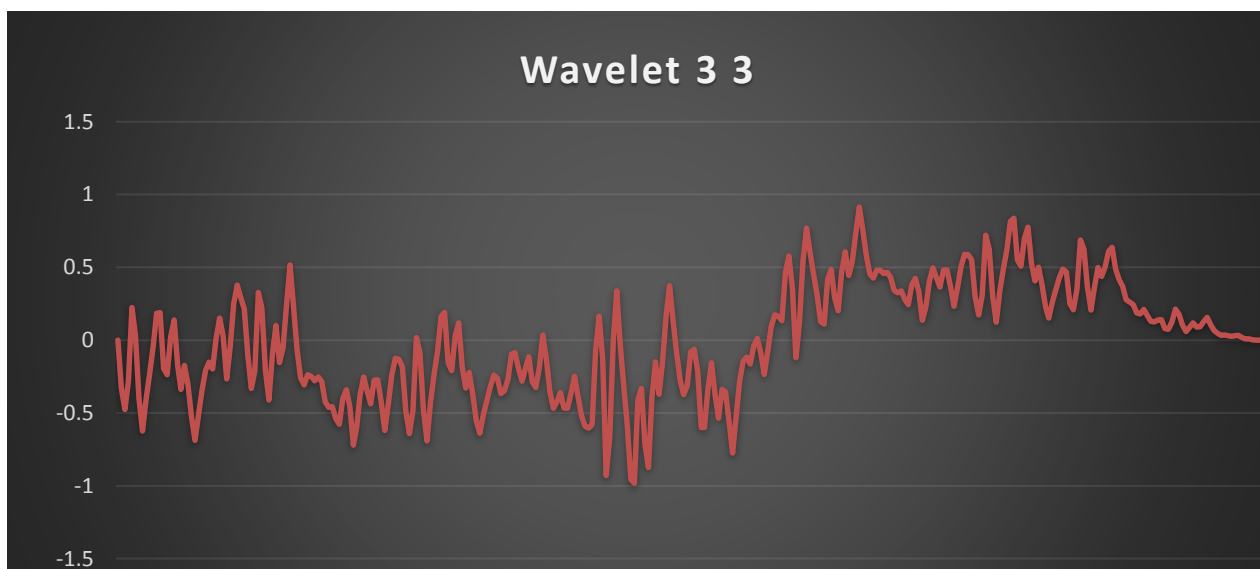
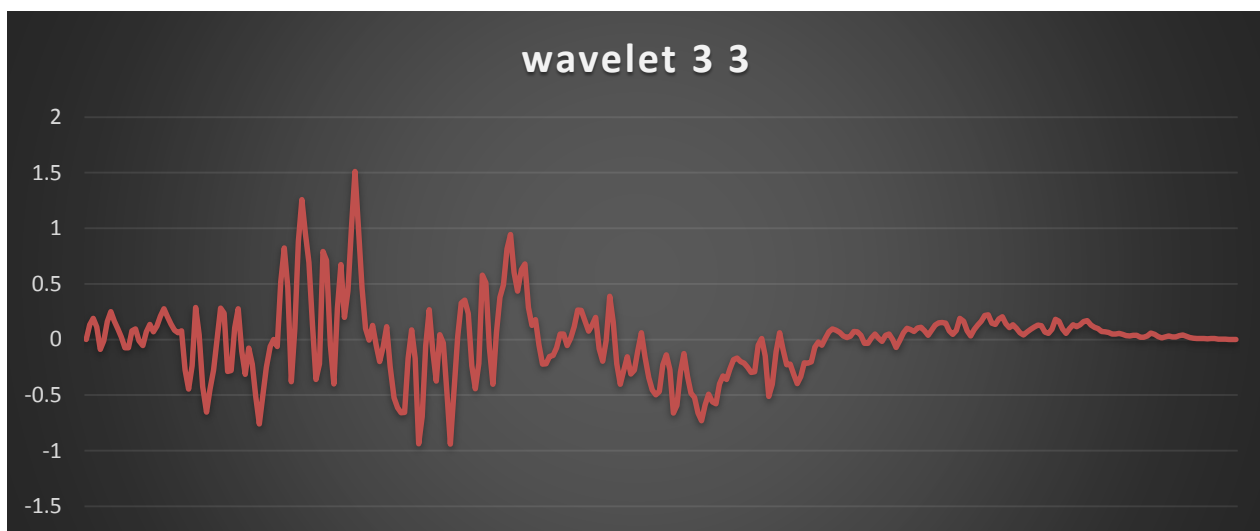
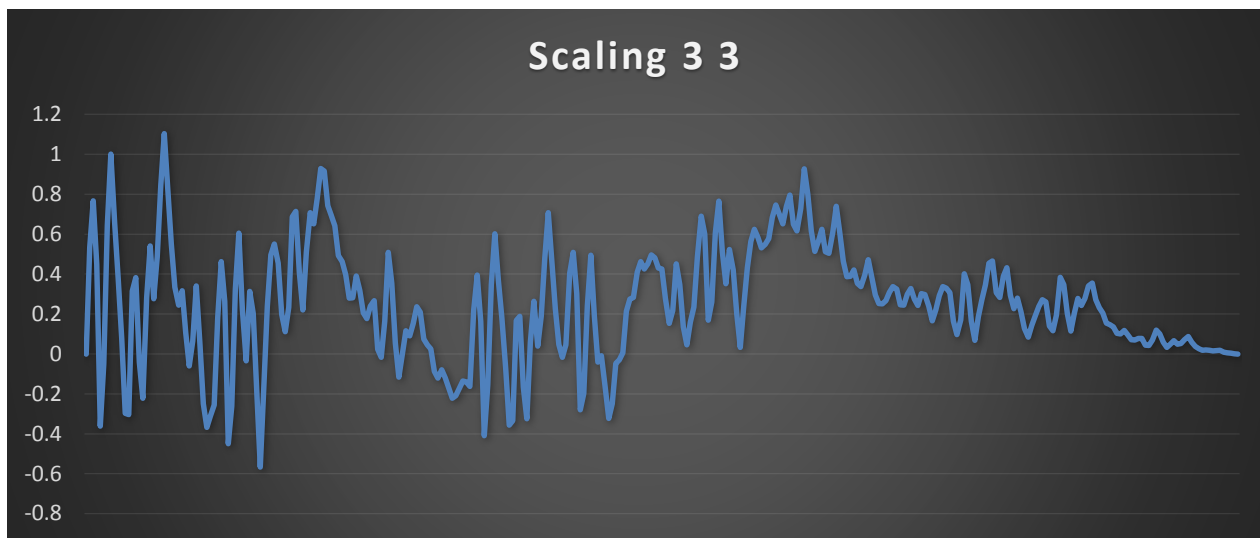
სადემონსტრაციოდ ამ პროგრამის დახმარებით აგებულია დობეშის მასშტაბის და ვეივლეტ ფუნქციები $g=2$ შემთხვევაში. (m დობეშის ვეივლეტებში ყოველთვის 2 არის.)

შემდეგ კი აღებულია 3×9 ვეივლეტ მატრიცა რომელიც გენერირებულია [2]–ში მოყვანილი ალგორითმის მიხედვით და ქვემოთ მოყვანილია მისი შესაბამისი ფუნქციების გრაფიკები.

აღსანიშნავია, რომ ამ შემთხვევაში განსხვავებით ჰაარის და დობეშის ვეივლეტებისა გვექნება 1 მასშტაბის ფუნქცია და 2 ვეივლეტ ფუნქცია.



დოზემის მასშტაბის და ვეივლეტ ფუნქციები 2×4 -ზე ვეივლეტ მატრიცისთვის.



პირველი არის მასშტაბის ხოლო მეორე და მესამე – ვეივლეტ ფუნქციები

დაწეროთ

```
#include<iostream>
#include<algorithm>
#include<fstream>
#include<math.h>
#define n 1000
#define y 100
#define e 0.00001
using namespace std;
int h=1;
double f[n],x[n],fs[n];
double WM[y][n], A[n][n],U[n][n];
void generatematrix(double (*WM)[n],double (*A)[n],int m, int g, int N){
    for(int i=0;i<N;i++){
        for(int j=0;j<N;j++){
            if ((m*i-j<m*g)&&(m*i>=j))
                A[i][j]=WM[0][m*i-j];
            else A[i][j]=0;
        }
        A[i][i]-=1;
    }
}

void fillU(double (*A)[n],double (*U)[n],int N){
    for(int i=0;i<N;i++){
        for(int j=0;j<N;j++)
            U[i][j]=A[i][j];
    }
}

void refillsub(double (*U)[n],int N,int i){
    int k=0;
    while(fabs(U[i+k][i])<e &&(i+k!=N-1)){k++;}
    if (fabs(U[i+k][i])>e) {
        for(int j=i;j<N;j++)
            U[i][j]+=U[i+k][j];
    }
}
```

```

}

void gausi(double (*A)[n],double (*U)[n],int N){
    fillU(A,U,N);
    for(int i=0;i<N;i++){
        if(fabs(U[i][i])<e) refillsub(U,N,i);
        if(fabs(U[i][i])>e){
            for (int k=i+1;k<N;k++){
                double temp=U[k][i];
                if(fabs(temp)>e)
                    for (int j=i;j<N;j++){
                        U[k][j]-
                        =(U[i][j]*temp)/U[i][i];
                    }
            }
        }
    }
}

```

```

void amoxsna(double (*U)[n],int N,double *f){
    if (fabs(U[N-1][N-1])<e) f[N-1]=1; else
        f[N-1]=0;
    for (int i=N-2;i>=0;i--){
        double s=0;
        for(int j=i+1;j<N;j++)
            s+=(f[j]*U[i][j]);
        if (fabs(U[i][i])<e) f[i]=1;
        else f[i]=-1*s/U[i][i];
    }
}

```

```

void setzeroes(int N){
    for(int i=0;i<N;i++)
        for(int j=0;j<N;j++)
            if (fabs(U[i][j])<e) U[i][j]=0;
}

```

```

void zerostream(int N,double *x){

```

```

for(int i=0;i<N;i++)
if (fabs(x[i])<e) x[i]=0;
}

```

```

void norming(int N,int r, double *x){
    double s=0;
    for(int i=0;i<r;i++)
        s+=f[i];
    for(int t=0;t<r;t++)
        x[t]=h*x[t]/s;
}

```

```

int detalizing(int m,int g, int N){
int r=N,error=0;
for(int tt=0;tt<5;tt++){
    for(int i=0;i<r*m;i++){
        x[i]=0;
        for(int k=0;k<m*g;k++)
            x[i]+=f[i-h*k]*WM[0][k];
    }
    r=r*m;
    h=h*m;
    for(int i=0;i<n;i++)
        f[i]=x[i];
    error=m*error+m-1;
}
return r-error;
}

```

```

void wavelet(int i,int m,int g){
    for(int j=0;j<n;j++){
        fs[j]=0;
        for(int k=0;k<m*g;k++)
            fs[j]+=x[j-h*k]*WM[i][k];
    }
}

int main(){

```

```

int i,j,m,g,N;

```

```

ifstream ifs("WM.txt");
ifs>>m>>g;

N=((g-1)*m)/(m-1)+2;
for(i=0;i<m;i++)
    for (j=0;j<m*g;j++)
        ifs>>WM[i][j];
generatematrix(WM,A,m,g,N);
gausi(A,U,N);
setzeroes(N);
amoxsna(U,N,f);

int final=detalizing(m,g,N);
zerostream(n,x);
norming(N,final, x);

for(i=0;i<final;i++)
    cout<<x[i]<<" ";

for (j=1;j<m;j++){
    wavelet(j,m,g);
    cout<<"\n"
    for(i=0;i<m*final;i++)
        cout<<fs[i]<<" ";
}

system("PAUSE");
return 0;
}

```

ბიბლიოგრაფია

- [1] H. L. Resnikoff and R. O. Wells, Wavelet Analysis, Springer-Verlag, 1998.
- [2] L. Ephremidze and E. Lagvilava, ``On compact wavelet matrices of rank m and of order and degree N ", preprint, <http://arxiv.org/abs/1109.3809v1>, 2011.
- [3] P. P. Vaidyanathan, Multirate Systems and Filter Banks, Prentice Hall, New Jersey, 1993.